© Коряйкина А. В., к.т.н., главный инженер проекта, ООО «Коммунжилпроект»
© Селиванов А. С., к.т.н.

Возможности интервального анализа при моделировании и в расчетах инженерных сооружений на примере систем подачи и распределения воды

Внедрение в практику проектирования и управления инженерными сетями и сооружениями систем поддержки принятия решений является важным фактором повышения эффективности проектирования новых объектов и управления действующими. Применение вычислительной техники позволяет не только освободить человека от рутиной работы, но и значительно расширить круг решаемых задач для повышения адекватности математического моделирования сложных инженерных систем. В частности, применение ЭВМ для всевозможных инженерных расчетов обусловило активное развитие одного из направлений вычислительной математики, получившего название «интервальный анализ» [1].

В основу интервального анализа положена достаточно простая идея, заключающаяся в представлении вещественных чисел (множество вещественных чисел здесь и далее будем обозначать R) двумя оценками – оценкой снизу a_1 и оценкой сверху a_2. Интервальное число A можно рассматривать как замкнутый вещественный интервал $A = \lfloor a_{1,} a_2 \rfloor$.

Для множества всех вещественных интервалов $I(R)$ можно определить бинарную операцию над двумя интервалами $A \otimes B = \{z = a \otimes b | a \in A, b \in B\}$, где $A, B \in I(R)$.

Опираясь на определение бинарной операции на $I(R)$ можно ввести естественным образом операции сложения, вычитания, умножения и деления интервалов:

$$A + B = [a_1 + b_1, a_2 + b_2] \quad (1)$$

$$A - B = [a_1 - b_2, a_2 - b_1] \quad (2)$$

$$A \times B = [\min(a_1 \times b_1, a_1 \times b_2, a_2 \times b_1, a_2 \times b_2), \max(a_1 \times b_1, a_1 \times b_2, a_2 \times b_1, a_2 \times b_2)] \quad (3)$$

$$A:B=\left[\min\left(a_1:b_1,a_1:b_2,a_2:b_1,a_2:b_2\right),\max\left(a_1:b_1,a_1:b_2,a_2:b_1,a_2:b_2\right)\right] \quad (4)$$

При необходимости набор операций (1) – (4) на множестве вещественных интервалов можно дополнить и другими операциями.

Преимущества интервального анализа по сравнению с классическим «точечным» представлением величин в инженерных приложениях вполне очевидны. Во-первых, интервальный анализ позволяет автоматически учитывать погрешности в задании исходных данных и погрешности, вызванных машинными округлениями. Во-вторых, любая математическая модель инженерной системы неточна и описывает реальный объект приближенно, а критерии оптимизации проектных решений носят зачастую противоречивый характер (в частности, трудно совместимыми являются критерии экономичности и надежности). В этом случае интервальный анализ может использоваться как средство учета неопределенности параметров и структуры модели инженерной системы [2]. В-третьих, важной особенностью для моделирования инженерных сетей и сооружений является многорежимность их работы, обусловленная неравномерностью нагрузки и различным составом работающего оборудования в различные моменты функционирования. Здесь, на наш взгляд, применение интервальных методов представляется наиболее естественным.

Многорежимность работы инженерных систем может учитываться с помощью различных методов вариации параметров расчетной модели [3]. В частности, если вариации параметров относительно малы, то решение задачи целесообразно осуществлять с применением методов теории чувствительности. В отдельных случаях, когда вариация параметров модели имеет случайный характер, наиболее удачным методом является метод Монте-Карло. Последний метод сводится к комбинации способа расчета параметров инженерной системы на некоторой мелкой сетке значений интервально заданных параметров и экономии вычислительных ресурсов за счет анализа, организованного и оцениваемого с помощью некоторых

теоретико-вероятностных соображений. Интервальные методы в этом контексте представляются наиболее простыми, прозрачными и легкореализуемые в вычислительном отношении.

Тем не менее, приходится констатировать, что в отечественной практике интервальный анализ не слишком часто используется для моделирования и управления сложными техническими системами. Имеет место необоснованная подмена данных интервальных по своей природе некоторыми численными значениями из интервалов. Широко распространенные методы обработки такой информации придерживаются стохастической парадигмы неопределенности. Это позволяет в терминах случайности моделировать многие аспекты интервальной неопределенности. Однако справедливость использования аппарата теории вероятности в этой ситуации часто не обоснована, что приводит к сложности интерпретации и ошибкам при анализе данных.

Рассмотрим некоторые возможности интервального анализа на примере полирежимного расчета системы подачи воды. Поверочные гидравлические расчеты систем подачи воды традиционно осуществляются для равномерного установившегося режима движения жидкости. Наибольшее распространение в инженерной практике получил подход, в соответствии с которым для составления уравнений для определения искомых неизвестных стационарной модели, описывающей мгновенное распределение потоков в сети, используются уравнения баланса линейных расходов в узлах сети (закон сохранения массы, или так называемый первый закон Кирхгофа) и уравнения баланса потерь энергии в замкнутых контурах сети (второй закон Кирхгофа).

Структура водопроводной сети моделируется конечно ориентированным связным графом с e дугами и υ вершинами. Математически линейный граф отображается $\upsilon \times e$ матрицей инциденций A. Элемент a_{ki} матрицы A равен $\mu 1$ в том случае, если i-я дуга инцидентна вершине k (правило знаков

использует направленность дуги по отношению к инцидентной вершине) и 0 в том случае, если i-я дуга неинцидентна вершине k.

Деревом графа называется подграф, содержащий все вершины графа и не образующий ни одного замкнутого цикла. Дуги, входящие в дерево, называются ветвями дерева, остальные – хордами. Цикломатическое число, определяющее число хорд, находится по формуле $\mu = (e - \upsilon + 1)$. Любому произвольно выбранному дереву графа однозначно соответствует $\upsilon - 1$ главное сечение и фундаментальная система μ циклов.

Главное сечение представляет собой подмножество дуг графа, содержащее ветвь дерева и хорды, соединяющие два поддерева графа, которые образуются из рассматриваемого дерева после удаления этой ветви дерева; фундаментальный цикл – подмножество ребер графа, содержащее хорду и ветви графа, образующие единственную простую цепь, соединяющую концевые точки этой хорды. Для ориентированного графа $\upsilon - 1$ главное сечение математически записывается матрицей главных сечений Q, а система главных циклов – цикломатической матрицей B.

Элемент q_{ki} матрицы Q равен μ1 в том случае, если i-я дуга принадлежит k-му сечению (правило знаков использует направленность дуги по отношению к направлению ветви дерева), и 0 в том случае, если i-я дуга не принадлежит k-му сечению.

Элемент b_{ki} матрицы B равен μ1 в том случае, если i-я дуга входит в k-й фундаментальный цикл (правило знаков использует направленность дуги по отношению к направлению хорды цикла), и 0 в том случае, если i-я дуга не входит в k-й цикл.

Использование для описания системы подачи воды теории графов позволяет представить законы Кирхгофа в матричной форме [4]:

$$\begin{cases} Q \times \overset{\rho}{q} = 0 \\ B \times \overset{\rho}{h} = 0 \end{cases}, \qquad (5)$$

где $\breve{q}$ и $\breve{h}$ - векторы расходов и диссипации энергии на участках сети соответственно.

Пусть теперь узловые отборы представляют собой интервальные числа из $I(R)$. В этом случае расходы на участках сети, а, значит, и узловые давления, также интервалы. Для удобства записи уравнений условно удалим из структуры графа сети дуги, отвечающие узловыми подачам и отборам и узел, на который замыкаются эти дуги. Интервальные узловые подачи и отборы инкапсулируем в интервальный вектор $\breve{q}_0$. В этих условиях потокораспределение в сети для стационарного состояния описывается системой уравнений Кирхгофа с замыкающими соотношениями, полученными из гидравлических соображений:

$$\begin{cases} Q \times \breve{q} = \breve{q}_0 \\ B \times \breve{h} = 0 \\ \breve{h} = f(\breve{q}) \end{cases}, \qquad (6)$$

где Q – матрица главных сечений графа сети, B – цикломатическая матрица графа сети, f - нелинейная функция, связывающая потери напора на участках сети $\breve{h}$ с протекающими по ним расходами воды $\breve{q}$, $\breve{q}_0$ - интервальный вектор узловых отборов (подач). Будем считать, что количество воды, которое подается в сеть, полностью потребляется, и вектор $\breve{q}_0$ этому условию удовлетворяет.

Система уравнений (6) нелинейная и содержит интервальный вектор. Методы решения систем нелинейных интервальных уравнений в настоящее время плохо изучены, поэтому для получения приблизительного решения задачи (6) линеаризуем систему.

Для линеаризации произведем гидравлический расчет для стационарного (когда узловые отборы заданы точечно) случая и перейдем от замыкающих соотношений вида $h_i = s_i \times q_{i0}^2$ к уравнениям типа $h_i = s_i \times q_{i0} \times q_i = s_{i0} \times q_i$,

где s_i - гидравлическое сопротивление i-го участка, q_{i0} - расход воды на i-ом участке для стационарного расчета, $s_{i0} = s_i \times q_{i0}$ - фиктивное гидравлическое сопротивление для интервального расчета, q_i - неизвестный интервал расходов на i-ом участке сети.

В результате такой линеаризации получим систему n алгебраических интервальных уравнений вида $S \times \overset{\rho}{U} = \overset{\rho}{F}$. (7)

Для решения (7) нами предлагается использовать метод Гаусса, адаптированный к решению систем интервальных линейных уравнений. Для определения компонентов интервального вектора расходов на участках сети $\overset{\rho}{U}$ необходимо преобразовать исходную матрицу S в матрицу треугольного вида при соответствующих преобразованиях вектора $\overset{\rho}{F}$. Переход от $S^{(i)}$ к $S^{(i+1)}$ (при $i \le n-1$, где n - число неизвестных в системе уравнений) матрице осуществляется по формулам Гаусса с использованием правил интервальной арифметики (1) – (4):

$$s_{i+1,i+1}^{(i+1)} = 1, \tag{8}$$

$$s_{k,i+1}^{(i+1)} = 0; \overline{k = i+2, n}, \tag{9}$$

$$s_{i+1,j}^{(i+1)} = s_{i+1,j}^{(i)} / s_{i+1,i+1}^{(i)}; j = \overline{i+2, n}, \tag{10}$$

$$f_{i+1}^{(i+1)} = f_{i+1}^{(i)} / s_{i+1,i+1}^{(i)}, \tag{11}$$

$$f_k^{(i+1)} = f_k^{(i)} - s_{k,i+1}^{(i)} \times f_{i+1}^{(i+1)}; k = \overline{i+2, n}, \tag{12}$$

$$s_{k,j}^{(i+1)} = s_{k,j}^{(i)} - s_{k,i+1}^{(i)} \times s_{i+1}^{(i+1)}; k = \overline{i+2, n}; j = \overline{i+2, n}. \tag{13}$$

На i-ом шаге преобразований матрица система уравнений имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & s_{12}^{(1)} & s_{13}^{(1)} & \dots & \dots & \dots & s_{1n}^{(1)} \\ 0 & 1 & s_{23}^{(1)} & \dots & \dots & \dots & s_{2n}^{(2)} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & \dots & \dots & 1 & s_{i,i+1}^{(i)} & \dots & s_{in}^{(i)} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & s_{i+1,i+1}^{(i)} & \dots & s_{i+1,n}^{(i)} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & \dots & \dots & \dots & s_{n,i+1}^{(i)} & \dots & s_{nn}^{(i)} \end{pmatrix} \overset{\rho}{U} = \begin{pmatrix} f_1^{(1)} \\ f_2^{(2)} \\ \dots \\ f_i^{(i)} \\ f_{i+1}^{(i)} \\ \dots \\ f_n^{(i)} \end{pmatrix}. \tag{14}$$

После завершения перехода к треугольному виду компоненты вектора $\overset{\rho}{U}$ могут быть определены из соотношений

$$u_n = f_n^{(n)}, \tag{15}$$

$$u_i + \sum_{j=i+1}^{n} s_{ij}^{(i)} \times u_j = f_i^{(i)}; i = n-1,...1. \tag{16}$$

В общем случае можно ввести интервальные гидравлические сопротивления в матрице S, однако предложенный алгоритм обеспечивает устойчивость только в том случае, когда S - интервальная M - матрица, F - неотрицательный интервальный вектор, то есть $f \geq 0$ для всех $f \in F$.

Для иллюстрации использования предложенного метода рассмотрим подачу воды в двухкольцевой сети (см. рисунок 1), состоящей из трех участков длиной $l_1 =$ 200 (м), $l_2 =$ 100 (м), $l_3 =$ 200 (м), из стальных труб условным проходом $D_1 = 100$ (мм), $D_2 = 125$ (мм), $D_3 = 150$ (мм). Удельные гидравлические сопротивления участков примем равными $S_1 = 173\left(\frac{c^2}{м^6}\right)$, $S_2 = 76\left(\frac{c^2}{м^6}\right)$, $S_3 = 31\left(\frac{c^2}{м^6}\right)$. Пусть отборы в узле подачи и отбора заданы интервально $q_{узл} = 40 \div 50$ (л/с). Необходимо определить интервалы изменения давления в узле отбора.

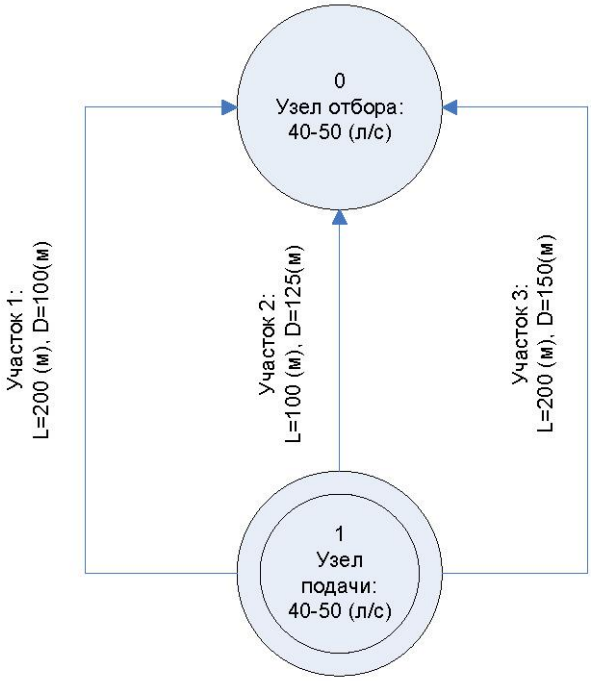

Рисунок 1. Расчетная схема двухкольцевой сети

Определим фиктивные сопротивления участков сети. Для этого составим систему уравнений Кирхгофа, соответствующую задаче в точечной постановке с отборами, равными средним из интервала $q_{узл} = 40 \div 50$ (л/с):

$$\begin{cases} q_{10} + q_{20} + q_{30} = 0.045 \\ 34600 \times q_{10}^2 - 7600 \times q_{20}^2 = 0 \\ 7600 \times q_{20}^2 - 6200 \times q_{30}^2 = 0 \end{cases} \qquad (17)$$

Из решения системы уравнений (17) определим значения фиктивных сопротивлений $S_{10} = 228\left(\frac{c}{м^2}\right)$, $S_{20} = 129\left(\frac{c}{м^2}\right)$, $S_{30} = 118\left(\frac{c}{м^2}\right)$. Запишем линеаризованную систему интервальных уравнений:

$$\begin{cases} q_1 + q_2 + q_3 = 0.04 \div 0.05 \\ 228 \times q_1 - 129 \times q_2 = 0 \\ 129 \times q_2 - 118 \times q_3 = 0 \end{cases} . \qquad (18)$$

Решим систему уравнений модернизированным методом Гаусса (8) – (13):

шаг 0: $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 228 & -129 & 0 \\ 0 & 129 & -118 \end{pmatrix} \times \overset{\rho}{U} = \begin{pmatrix} 0.04 \div 0.05 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (19)$$

шаг 1: $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -357 & -228 \\ 0 & 129 & -118 \end{pmatrix} \times \overset{\rho}{U} = \begin{pmatrix} 0.04 \div 0.05 \\ -11.4 \div -9.12 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (20)$$

шаг 2: $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0.64 \\ 0 & 0 & -200.6 \end{pmatrix} \times \overset{\rho}{U} = \begin{pmatrix} 0.04 \div 0.05 \\ 0.026 \div 0.032 \\ -4.128 \div -3.354 \end{pmatrix}, \quad (21)$$

шаг 3: $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0.64 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \overset{\rho}{U} = \begin{pmatrix} 0.04 \div 0.05 \\ 0.026 \div 0.032 \\ 0.0167 \div 0.021 \end{pmatrix}. \quad (22)$$

Отсюда получаем, $q_3 = 0.0167 \div 0.021 \left(м^3/с\right)$, $q_2 = 0.0153 \div 0.0186 \left(м^3/с\right)$, $q_1 = 0.008 \div 0.0104 \left(м^3/с\right)$. Для определения интервала изменений давления в узле отбора достаточно подсчитать потери напора по любой линии, они составят интервал $\Delta h = 1.7 \div 2.6 \left(м.в.с.\right)$, соответственно колебания давления составят $0.9 \left(м.в.с.\right)$.

Следует отметить, что рассмотренный пример лишь иллюстрирует общие принципы расчета систем подачи воды в рамках интервального анализа. Реальные задачи высокой размерности требуют введения дополнительных правил для построения расчетных схем с интервальными параметрами и использования специальных методов решения нелинейных задач типа (6).

Выводы:

Методы интервального анализа являются эффективным инструментом для моделирования инженерных систем с учетом неопределенности их параметров, структуры и полирежимного характера функционирования. В работе рассмотрена задача расчета системы подачи воды для случая, когда узловые подачи и отборы не являются определенными величинами, а заданы

интервально. Для решения задачи разработан специальный метод, основанный на адаптации способа Гаусса к решению систем интервальных линейных уравнений. Представляется перспективным дальнейшее изучение возможностей интервальных методов при решении оптимизационных задач на инженерных сетях и анализе переходных процессов.

Литература:

1. **Альфельд Г.** Введение в интервальные вычисления / Г. Альфельд, Ю. Херцбергер. – М.: Мир, 1987. – 360 с.

2. **Карамбиров С.Н.** Совершенствование методов расчета систем подачи и распределения воды в условиях многорежимности и неполной исходной информации / С.Н. Карамбиров // Автореферат на соискание ученой степени доктора технических наук. – М., 2005 – 46 с.

3. **Киншт Н.В.** Интервальный анализ в задачах теории электрических цепей / Н.В. Киншт, М.А. Кац // Электричество №10, 1999. – С. 45-57.

4. **Евдокимов А.Г.** Моделирование и оптимизация потокораспределения в инженерных сетях / А.Г. Евдокимов, А.Д. Тевяшев. – М.: Стройиздат, 1990. – 368 с.

© Коряйкина А. В., к.т.н., главный инженер проекта, ООО «Коммунжилпроект»
© Селиванов А. С., к.т.н.

Аннотация

Анализируется проблема расчета систем подачи воды при неопределенности ее параметров (полирежимный характер водопотребления). Рассматриваются возможности применения методов интервального анализа для решения задач теории расчета систем подачи воды. Приводится численный пример расчета.

The problem of the analysis of water distributing system, in the case of a priory uncertainty of the information about its parameters, is discussed. The possibility of using interval analysis methods to solve problems of water distributing system theory is considered. Some examples are given.